



دانشگاه رازی

مکانیک سیالات

جريان خارجي

میثم سعیدی - استادیار گروه مهندسی مکانیک

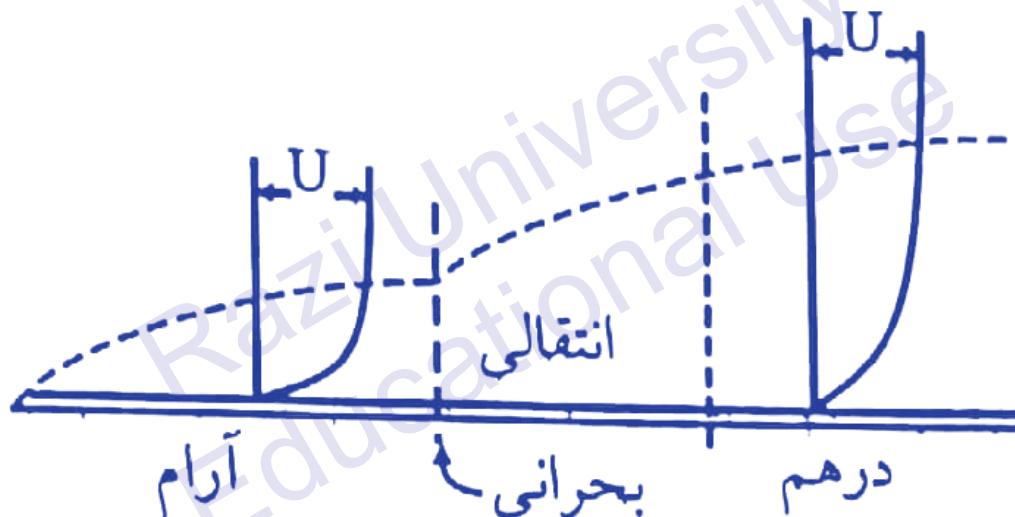
جريان لايه مرزي

مفهوم لايه مرزي و مشخصات آن

قبل از بررسی مفهوم لايه مرزي جريانهای خارجی را تعریف می‌کنیم. جريانهای خارجی، جريانهایی هستند که از روی اجسام غوطه‌ور در یک سیال نامحدود عبور می‌کنند برای مثال می‌توان از جريان روی صفحه تخت و جريان روی استوانه وکره نام برد. در اين جريانها دو ناحيه وجود دارد ناحيه اول، ناحيه‌ای نزديک به مرزهای جامد است که در آن اثرات لزجت و تغييرات سرعت مهم هستند و آن را لايه مرزي می‌نامند و ناحيه دوم که بقیه جريان است، اين ناحيه غيرلزج را که در آن گراديان سرعت تقریباً صفر است می‌توان ناحيه جريان ایده‌آل درنظر گرفت.

☞ **لکته:** در لايه مرزي نيروهای لزجي و اينرسى هر دو مهم هستند.

مطابق شکل زیر جریان یکنواختی با سرعت ثابت U پیرامون یک صفحه تخت را در نظر می‌گیریم.
سرعت جریان ورودی صفحه صفر است و در خارج از لایه مرزی U است.



ضیغامت لایه مرزی: به فاصله‌ای از دیواره اطلاق می‌شود که در آن سرعت به موازات صفحه، $u = 99/0$ نشان می‌دهند.

با توجه به شکل داده شده، سه ناحیه وجود دارد ناحیه اول ناحیه آرام است که از لبه صفحه شروع می‌شود و ضیغامت آن به طور مرتب افزایش می‌یابد. ناحیه دوم ناحیه انتقالی است که در آن جریان از حالت آرام به درهم تبدیل می‌شود و بعد از این ناحیه، ناحیه درهم قرار دارد.

در لایه مرزی آرام، سیال به طور منظم حرکت می‌کند و می‌توان خطوط جریان را که حرکت ذرات سیال در امتداد آن است تشخیص داد. در لایه مرزی درهم، حرکت سیال به صورت کاملاً نامنظم است و توسط نوسانات سرعت مشخص می‌شود. انتقال مومنتم و درنتیجه اصطکاک پوسته‌ای در اثر این نوسان افزایش می‌یابند.

گذر از جریان آرام به جریان درهم به هندسه سطح، سرعت جریان آزاد، دمای سطح، نوع سیال و موارد دیگر وابسته است. نقطه‌ای را که در آن تبدیل جریان آرام به درهم شروع می‌شود با استفاده از عدد رینولدز بحرانی می‌توان مشخص کرد.

عدد رینولدز عبارت است از:

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{U x}{\nu}$$

که در آن x طول مشخصه است. برای صفحه مقدار آن برابر فاصله از لبه حمله و در جهت جریان است و برای یک استوانه یا کره برابر D است.

عدد رینولدز بحرانی، عدد رینولدزی است که در آن جریان درهم می‌شود و مقدار آن برای هندسه‌های مختلف فرق می‌کند.

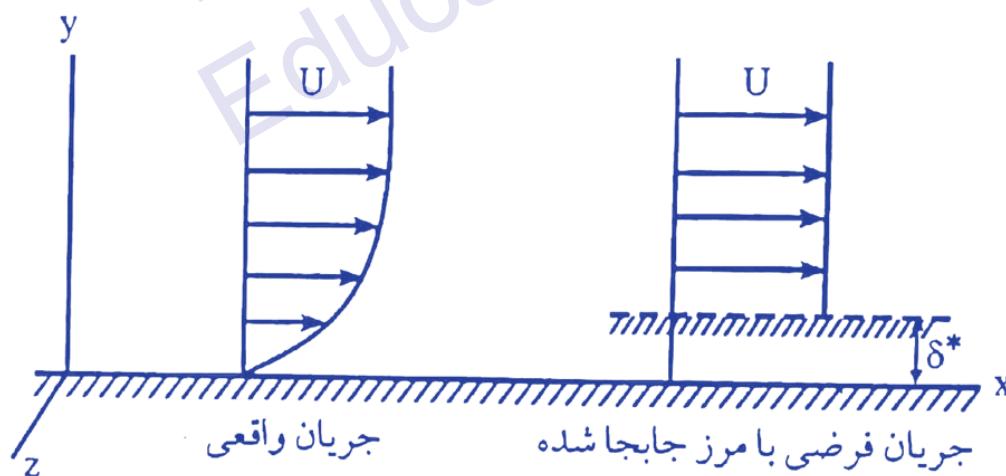
- ☞ **نکته:** تبدیل جریان آرام به درهم در جریان روی صفحه در $Re = 5 \times 10^5$ رخ می‌دهد.
- ☞ **نکته:** انتقال در لایه مرزی مربوط به یک صفحه تخت از حالت آرام به درهم علاوه بر عدد رینولدز به عوامل دیگری هم وابسته است.
برخی از عواملی که سبب می‌شود گذر جریان از آرام به درهم زودتر اتفاق بیفتد عبارتند از:
 - ۱) افزایش زیری سطح
 - ۲) افزایش میزان درهمی جریان آزاد
 - ۳) گرمایش سیال توسط سطح
 - ۴) گرادیان فشار معکوس

ضخامت جابه‌جایی: فاصله‌ای است که باید مرز جامد در یک جریان بدون اصطکاک را تغییر داد تا همان کاهش دبی جرمی را در حالتیکه مرز جامد در لایه مرزی بود بدهد.

ضخامت جابه‌جایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\delta^* = \int_b^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_b^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

* δ^* شاخصی متناسب با دبی جریان از دست رفته در اثر وجود لایه مرزی است و از لحاظ فیزیکی فاصله‌ای است که جریان غیرلزج خارجی در اثر حضور لایه مرزی انحراف پیدا می‌کند.



مثال) توزیع سرعت در یک لایه مرزی به صورت زیر است :

$$u(x,y) = \omega x (1 - e^{-\delta y})$$

مقدار ضخامت جابجایی یعنی δ^* برای این پروفیل سرعت، کدامیک از مقادیر زیر است؟

۱/۳ (۴)

۱/۴ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۱۲ (۱)

$$\delta^* = \int_{\cdot}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy \quad (\text{حل})$$

سرعت در خارج از لایه مرزی ($y \rightarrow \infty$) است.

$$u_{\infty} = \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = \omega x$$

$$\delta^* = \int_{\cdot}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega x (1 - e^{-\delta y})}{\omega x} \right] dy = \int_{\cdot}^{\infty} e^{-\delta y} dy = \frac{1}{\delta}$$

گزینه (۲) صحیح است.

☞ نکته: موقعی که لایه مرزی از حالت آرام به درهم تبدیل می‌شود ضخامت لایه مرزی شدیداً افزایش می‌یابد در نتیجه δ و δ^* در جریانهای درهم بزرگتر هستند.

ضخامت مومنتم: ضخامت مومنتم به عنوان ضخامتی از لایه سیال با سرعت U تعریف می‌گردد که به ازای آن شار مومنتم برابر است با شار مومنتم در لایه مرزی

$$\theta = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_{\cdot}^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

معادلات لایه مرزی

برای تعیین معادلات لایه مرزی سرعت می‌توان از المانگیری استفاده نمود یا از معادلات اصلی بهره گرفت.

فرضیات لازم جهت تعیین معادله پیوستگی و معادلات لایه مرزی سرعت عبارتند از:

۱) لایه مرزی تراکم ناپذیر است ($\rho = cte$)

۲) جریان پایا است.

۳) خواص ثابت هستند. ($\mu, \dots = cte$)

۴) مؤلفه سرعت در امتداد سطح خیلی بزرگتر از مؤلفه آن در جهت عمود بر سطح است.

$(u \gg v)$

۵) تنشهای عمودی ناچیز هستند. $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$

با فرضیات فوق معادلات پیوستگی و لایه مرزی سرعت به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 : \text{معادله پیوستگی}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \text{معادله اندازه حرکت در جهت } x$$

همچنین با تحلیل مرتبه جملات مشخص می‌شود معادله اندازه حرکت در جهت y به شکل

$$P = P(x) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{ساده می‌شود که نشان می‌دهد فشار در جهت عمود بر سطح ثابت است:}$$

توجه: در روی دیواره ($y = 0$) که $v = 0$ است، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

معادلات لایه مرزی برای جریان درهم به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 : \text{معادله پیوستگی}$$

$$x: \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} [P_{ex}(x)] + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'})$$

تعیین صاف یا زبر بودن جریان در لایه مرزی درهم

شیوه حالت‌هایی که در جریان درهم داخل لوله‌ها داشتیم اینجا نیز براساس نسبت ارتفاع زبری سطح به ضخامت زیر لایه لزج سه حالت خواهیم داشت:

الف) ناحیه صاف هیدرولیکی: در این ناحیه زبری اثری بر ضریب اصطکاک پوسته‌ای ندارد.

ب) ناحیه گذرا: در این ناحیه ضریب اصطکاک پوسته‌ای تابع عدد رینولدز و زبری نسبی است.

ج) ناحیه زبر: در این ناحیه ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز است و تنها تابع زبری نسبی است.

☞ **نکته:** در جریان درهم با افزایش تنش برشی روی سطح جسم، ضخامت زیر لایه لزج کاهش می‌یابد.

☞ **نکته:** در جریان درهم روی یک صفحه صاف در ناحیه زیر لایه لزج، لزجت مولکولی اثر غالب را دارد.

جريان روی صفحه تخت \leftarrow معادلات لایه مرزی

جريان روی صفحه تخت نشان داده شده در شکل را درنظر می‌گیریم با توجه به ثابت بودن

$\frac{dP}{dx} = 0$ سرعت و با استفاده از معادله برنولی نتیجه می‌گیریم که فشار ثابت بوده و در نتیجه

معادلات پیوستگی و مومنتم حاکم بر جريان عبارتند از:

الف) جريان آرام

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 : \text{معادله پیوستگی}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \text{معادله اندازه حرکت در جهت } x$$

شرایط مرزی معادلات فوق به صورت زیر است:

$$y = 0 : u = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y = \delta : u = U, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

مثال) برای حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت پروفایل سرعت به صورت زیر ارائه شده است که در آن

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (\delta \text{ ضخامت لایه مرزی است}) \quad \text{با توجه به شرایط مرزی ثابت‌های } c_1, c_2 \text{ را به دست آورید.}$$

$$\frac{u}{u_\infty} = c_1 \eta + c_2 \eta^3$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

(حل)

با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر حرکت سیال بر روی یک صفحه داریم:

$$y = \delta : u = u_\infty \Rightarrow \eta = 1, \quad c_1 + c_2 = 1 \quad (1)$$

$$y = \delta : \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{\delta} + \frac{3c_2}{\delta} = 0 \Rightarrow c_1 + 3c_2 = 0 \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

گزینه (۳) صحیح است.

حل بلازیوس

جريان دو بعدی تراکم ناپذیری روی یک صفحه تخت درنظر می گیریم که معادلات در آن صادق هستند.

بلازیوس برای حل این معادلات ابتدا از تغییر متغیرهای زیر استفاده نمود:

$$\xi = x \quad , \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

او سپس با انجام اعمال ریاضی و تعریفتابع $f(\eta)$ به شکلی که $\frac{u}{U} = f'(\eta)$ است به معادله دیفرانسیل زیر رسید:

$$2f''' + ff'' = 0$$

معادله دیفرانسیل فوق را معادله بلازیوس می نامند که یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و از مرتبه سوم است و به طریق عددی قابل حل است.

با استفاده از حل معادله بلازیوس می‌توان روابط مربوط به تعیین ضخامت لایه مرزی و ضریب اصطکاک پوسته‌ای و ... به دست آورد.

$$\delta = \frac{\alpha x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

 **نکته:** در جریان آرام روی یک صفحه تخت داریم: $0/344$ و $\frac{\theta}{\delta} = 0/133$ و $\frac{\delta^*}{\delta} = 0/000$

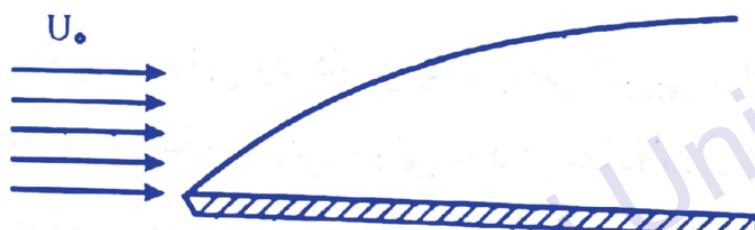
$$\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{1/5}}$$

ب) جریان درهم

$$C_f = \frac{0.074}{Re_x^{1/5}}$$

توجه داشته باشید که روابط فوق دقیق هستند.

مثال) هوا با سرعت $7/2 \text{ ft/s}$ در $100^\circ F$ روی سطح مستوی به عرض 1 ft جریان دارد. ضخامت لایه مرزی را در فاصله 1 ft از لبه جلویی سطح محاسبه کنید.

$$\nu = 1/8 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}$$


- $0/0025 \text{ ft}$ (۱)
- $0/025 \text{ ft}$ (۲)
- $0/25 \text{ ft}$ (۳)
- $2/5 \text{ ft}$ (۴)

حل)

$$\delta = \frac{\nu x}{\sqrt{Re_x}} = \nu \sqrt{\frac{vx}{u_\infty}} = \nu \sqrt{\frac{1/8 \times 10^{-4} \times 1}{7/2}} = 0.025 \text{ ft}$$

گزینه (۲) صحیح است.

نکته:

$$\delta \propto x^{\frac{4}{5}} \quad , \quad \text{در جریان آرام: } \delta \propto x^{\frac{1}{2}}$$

نکته:

$$C_f \propto x^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad \text{در جریان آرام: } C_f \propto x^{-\frac{1}{2}}$$

مثال) ضخامت لایه مرزی در منطقه آشفته متناسب با کدامیک از توابع زیر است؟ (x فاصله از ابتدای سطح می باشد.)

$$x^{\frac{1}{5}} \quad (4)$$

$$x^{-\frac{4}{5}} \quad (3)$$

$$x^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$x^{\frac{4}{5}} \quad (1)$$

حل) گزینه (1) صحیح است.

مثال) اگر دو صفحه محدود که نسبت طولی آنها $\frac{L_1}{L_2} = 5$ باشد، در جریان سیال لزج غیرقابل تراکم لایه‌ای قرار گیرند. نسبت تنش برشی بر روی هر دو صفحه کدام است؟

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{5} \quad (1)$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad (2)$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad (3)$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{5} \quad (4)$$

حل)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.044}{Re^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad C_f \propto x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \tau_w \propto x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

گزینه (۲) صحیح است.

روش انتگرالی ون کارمن برای حل معادلات لایه مرزی

روش انتگرالی ون کارمن یک روش تقریبی برای حل معادلات لایه مرزی سرعت و گرما است. در اینجا ما به شکل خیلی جزئی به ذکر معادلات نهایی و کاربرد آنها می‌پردازیم و از ذکر جزئیات مربوط به بدست آوردن این معادلات خودداری می‌کنیم.

معادله انتگرالی اندازه حرکت در حالتیکه فشار ثابت باشد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \int_{\cdot}^{\delta} u(U-u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{که در آن:}$$

معادله فوق را می‌توان هم برای جریان آرام و هم جریان درهم به کار برد.

توجه: معادله انتگرالی فوق را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

برای تعیین ضخامت لایه مرزی از روش انتگرالی، مراحل زیر را داریم:

۱) یک توزیع سرعت برای لایه مرزی در نظر می‌گیریم: $(\eta = \frac{y}{\delta}, \frac{u}{U} = f(\eta))$

۲) شرایط مرزی را بر توزیع سرعت فرض شده اعمال کرده و ضرایب مجهول را به دست می‌آوریم.

۳) توزیع سرعت حاصل شده را در معادله انتگرالی قرار می‌دهیم و معادله دیفرانسیلی بر حسب δ به دست می‌آوریم.

۴) معادله دیفرانسیل حاصل شده را حل کرده و δ را تعیین می‌کنیم.

مثال) با استفاده از پروفیل سرعت خطی $\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$ برای جریان روی صفحه مسطح عبارتی جهت ضخامت لایه مرزی به صورت تابعی از x بدست آورید.

$$\delta = \frac{4/5x}{Re_x} \quad (4)$$

$$\delta = \frac{3/46x}{\sqrt{Re_x}} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{x^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (2)$$

$$\delta = \frac{x}{Re_x} \quad (1)$$

حل)

با استفاده از معادله انتگرالی اندازه حرکت داریم:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_{\cdot}^{\delta} u(U-u) dy = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta} \Rightarrow u = U \frac{y}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{U}{\delta}$$

$$\rho \frac{d}{dx} \int_{\cdot}^{\delta} u(U-u) dy = \rho \frac{d}{dx} \int_{\cdot}^{\delta} u U \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \rho \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{6} U^2 \delta\right) = \frac{1}{6} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{1}{6} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{U}{\delta} \Rightarrow \int \delta d\delta = \int \frac{6\mu}{\rho U} dx \Rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x$$

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{Re_x}} = \frac{3/46x}{\sqrt{Re_x}}$$

گزینه (۳) صحیح است.

لکته: هرگاه توزیع سرعت برای جریان آرام روی صفحه تخت به شکل یک عبارت درجه دوم فرض شود با اعمال شرایط مرزی و استفاده از معادله انتگرالی ون کارمن خواهیم داشت:

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$\tau_w = \frac{2\mu U}{\delta} , \quad \delta = \frac{\omega / \tau \lambda x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{0.173}{\sqrt{Re_x}} , \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{2} , \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{2}{15}$$

نکته: هرگاه توزیع سرعت برای جریان آرام روی صفحه تخت به شکل یک عبارت درجه سوم فرض شود با اعمال شرایط مرزی و استفاده از معادله انتگرالی ون کارمن خواهیم داشت:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

$$\tau_w = \frac{3\mu U}{\delta}, \quad \delta = \frac{4/64x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{0.647}{\sqrt{Re_x}}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{8}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{39}{280}$$

نکته: هرگاه از قانون یک هفتمن پراتل برای توزیع سرعت جریان درهم روی صفحه تخت استفاده شود با استفاده از معادله انتگرالی ون کارمن خواهیم داشت:

$$\tau_w = 0.029 \frac{\rho U^2}{Re_x^{1/4}}, \quad \delta = \frac{0.382x}{Re_x^{1/4}}$$

$$C_f = \frac{0.094}{Re_x^{1/4}}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}$$

نکته: اگر از توزیع سرعت لگاریتمی ذکر شده در فصل ۵ استفاده کنیم C_D به شکل زیر حاصل می شود:

$$C_D = \frac{0.400}{(\log Re_L)^{2/5}}$$

نکته: دبی جرمی داخل لایه مرزی به ازای واحد عرض عبارت است از:

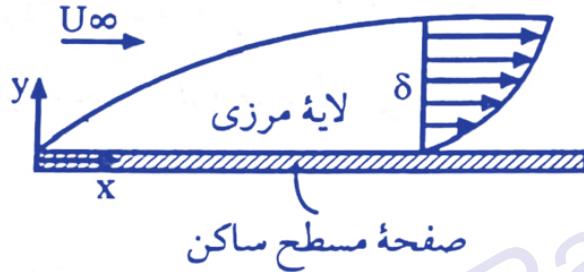
اگر توزیع سرعت به صورت $\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$ باشد دبی جرمی داخل لایه مرزی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{m} = \frac{\rho}{\lambda} U \delta$$

مثال) پروفیل سرعت در داخل لایه مرزی جریان آرام روی سطح افقی به صورت

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$$

داده شده است. دبی جرمی داخل لایه مرزی برابر است با:



$$\frac{2}{8} \rho u_\infty \delta \quad (1)$$

$$\frac{5}{8} \rho u_\infty \delta \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \rho u_\infty \delta \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \rho u_\infty \delta \quad (4)$$

حل) گزینه (۲) صحیح است.

نیروهای پسا (دراگ) و برآ (لیفت)

هرگاه جسمی داخل یک جریان سیال قرار گیرد به دلیل وجود نیروی اصطکاک، تغییرات فشار روی سطح جسم و تغییر مومنتم سیال، از طرف سیال اطراف نیرویی بر آن وارد می‌شود که این نیرو را به دو مؤلفه می‌توان تجزیه نمود. مؤلفه‌ای از این نیرو را که در امتداد جریان وارد می‌شود نیروی پسا یا دراگ (F_D) می‌نامند و مؤلفه عمود بر جریان را نیروی برآ یا لیفت (F_L) می‌نامند.

$$F_D = C_D \frac{\rho U^2}{2} A$$

$$F_L = C_L \frac{\rho U^2}{2} A$$

U سرعت سیال، ρ چگالی سیال، C_D ضریب پسا و C_L ضریب برآ است.

A سطح تصویری است که به شرایط جسم و میدان بستگی دارد و به طریقه زیر تعیین می‌شود:

۱) برای اجسامی مثل استوانه و کره که از هر جهت دارای ضخامت قابل توجه هستند، A عبارت

است از سطح تصویر شده جسم بر روی صفحه عمود بر جهت جریان

۲) برای اجسام شناور در یک سیال که در تماس با سیال دوم نیز هستند مانند کشتی‌ها و برج‌ها، A

عبارت است از سطح به اصطلاح خیس شده جسم شناور

۳) برای اجسام پهن و نازک مثل بالها و هیدروفیلها، A عبارت است از سطح موازی با جهت جریان

به طوری که جسم از بالا دیده شود.

توجه داشته باشید که معادلات هم برای جریان آرام و هم برای جریان درهم صادق هستند و

می‌توان آنها را برای اشکال هندسی مختلف به کار برد.

مثال) آب با سرعت m/s ۱۰ از روی کره‌ای با قطر $2mm$ عبور می‌نماید. اگر ویسکوزیتة آب $1cp$ در نظر گرفته شود و ضریب کشش در فاصله عدد رینولدز 200000 تا 500 باشد، نیروی کشش وارد شده بر ذره چند N می‌باشد؟

$$(\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, g = 10 \text{ m/s}^2)$$

۰/۲۸ (۴)

۰/۱۴ (۳)

۰/۰۷ (۲)

۰/۰۰۷ (۱)

حل)

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{1000 \times 10 \times 2 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = 2 \times 10^4 \Rightarrow C_D = 0/44$$

$$F_D = C_D \frac{\rho U^2}{2} A = 0/44 \times \frac{1000 \times 10^2}{2} \times \frac{\pi \times (2 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.07 N$$

گزینه (۲) صحیح است.

نیروی دراگ

نیروی دراگ وارد شده بر جسم برابر است با مجموع دراگ فشاری یا شکلی $F_{D,P}$ و دراگ اصطکاکی یا پوسته‌ای $F_{D,F}$

$$F_{D,P} = \int_A P dA$$

$$F_{D,F} = \int_A \tau_w dA$$

نیروی دراگ پوسته‌ای یا اصطکاکی: نیروی دراگ پوسته‌ای به علت وجود تنفس روی سطح حاصل می‌شود و نیرویی است که توسط سیال بر روی جامداتی که در مسیر جريان قرار می‌گيرند اعمال می‌شود. انتقال مومنتم عمود بر سطح ناشی از اين نیرو است که موازي با مسیر جريان بر سطح وارد می‌شود.

☞ **نکته:** در جریان سیال از روی یک صفحه تخت تنها نیروی دراگ پوسته‌ای داریم.

نیروی دراگ شکلی: هرگاه سیال به موازات سطح جریان نداشته باشد به طوریکه جهت عبور از جسم جامد ناگزیر به تغییر مسیر گردد (مانند کره) علاوه بر نیروی دراگ پوسته‌ای، نیروی دراگ شکلی هم حاصل خواهد گردید.

دراگ فشاری از اختلاف فشار زیاد در ناحیه سکون جلوی جسم و ناحیه کم فشار در قسمت جدا شده پشت جسم در حالتیکه دنباله تشکیل شود، ناشی می شود.

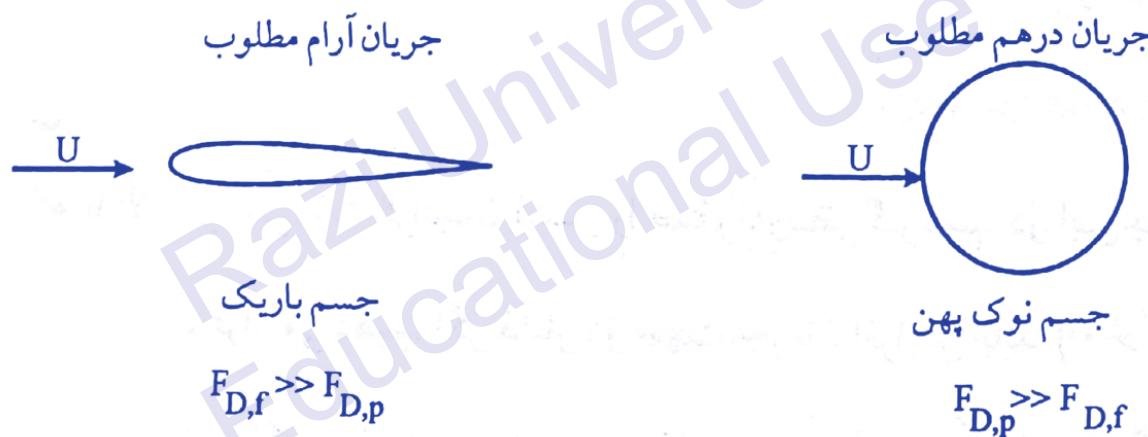
دراگ اصطکاک به علت وجود تنش برشی روی سطح ایجاد می گردد.

سهم هر کدام از دو نوع دراگ در دراگ کل، به شکل جسم و به خصوص ضخامت آن وابسته است.

هرگاه ضخامت جسم صفر باشد یعنی یک صفحه مسطح داشته باشیم دراگ فشاری صفر است و دراگ کل برابر است با دراگ اصطکاکی.

☞ **نکته:** هرگاه جسم باریک باشد دراگ اصطکاکی بسیار بیشتر از دراگ فشاری خواهد بود. در این حالت چون دراگ اصطکاکی در جریان آرام کمتر از جریان درهم است جریان آرام بر روی جسم مطلوب است.

☞ **نکته:** هرگاه جسم پهن باشد دراگ فشاری بسیار بیشتر از دراگ اصطکاکی خواهد بود. در این حالت چون دراگ فشاری در جریان درهم کمتر از جریان آرام است جریان درهم بر روی جسم مطلوب است.



☞ **نکته:** با کاهش ضخامت زیر لایه لزج، اصطکاک پوسته‌ای افزایش می‌یابد.

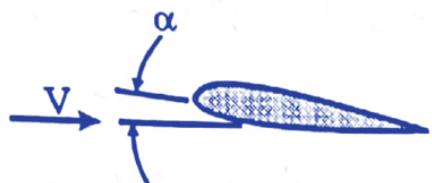
☞ **نکته:** برای جریان در امتداد محور یک استوانه، ضریب دراگ در $\frac{L}{D} = 2$ حداقل است.

نیروی لیفت

چنانچه اشاره گردید نیروی لیفت مؤلفه عمود بر جریان نیروی وارد شده از طرف سیال بر جسم است. با توجه به تعریف نیروی لیفت، ضریب لیفت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{\rho U^2}{2} A}$$

ضریب لیفت تابعی از ا عدد رینولدز و زاویه حمله است ($C_L = f(Re, \alpha)$)
توجه داشته باشید که زاویه حمله، زاویه بین وتر ایرفویل و امتداد جریان آزاد سیال است که به عنوان مثال در ایرفویل نشان داده شده در شکل زیر آورده شده است.



استال: با افزایش زاویه حمله، ضریب لیفت کاهش و ضریب دراگ افزایش ناگهانی می‌یابند که این پدیده را استال می‌نامند.

مثال) زمانی که ایرفویل در شرایط *tall* قرار می‌گیرد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

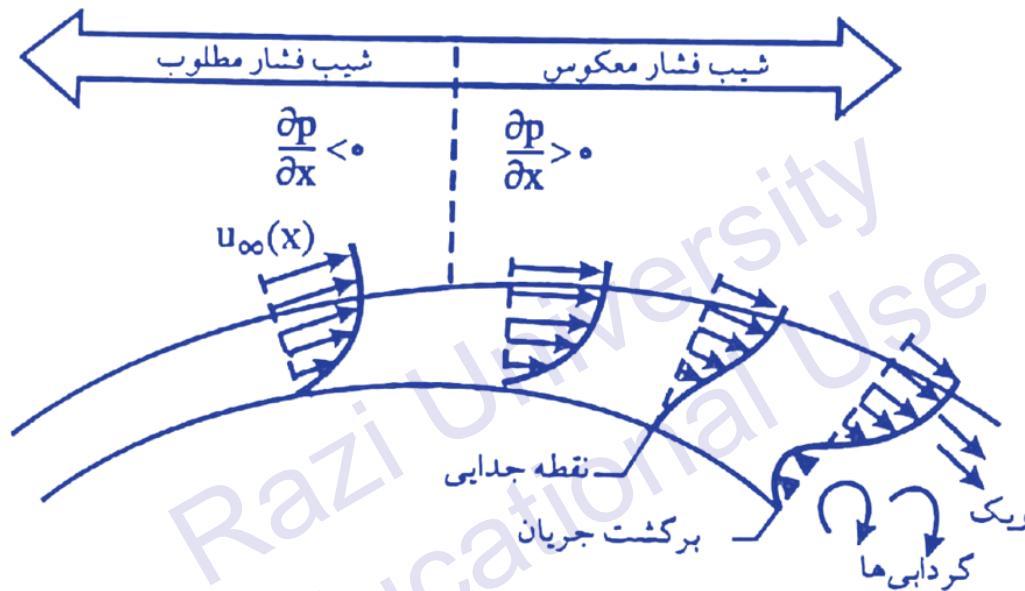
- ۱) ضرایب دراگ و لیفت هردو افزایش می‌یابند.
 - ۲) ضریب لیفت کاهش یافته لیکن ضریب دراگ تغییر چندانی نمی‌کند.
 - ۳) ضریب لیفت کاهش پیدا کرده و ضریب دراگ افزایش می‌یابد.
 - ۴) ضریب لیفت کاهش می‌یابد اما نیروی لیفت تغییری نخواهد کرد.
- حل) گزینه (۳) صحیح است.

جدایش

در جریانهایی که تا الان بررسی شد گرادیان فشار را صفر در نظر گرفتیم. در این بخش وجود گرادیان فشار را مورد بحث قرار می‌دهیم. اگر فشار در جهت جریان افزایش یابد ($\frac{dP}{dx} > 0$) گوییم گرادیان فشار معکوس است و اگر فشار در جهت جریان کاهش یابد ($\frac{dP}{dx} < 0$) گوییم گرادیان فشار مطلوب است.

در صورتیکه فشار در طول صفحه افزایش پیدا کند ($\frac{dP}{dx} > 0$) نیروی مقاوم در برابر حرکت سیال در داخل لایه مرزی علاوه بر نیروی اصطکاک شامل نیروی فشار هم خواهد بود بنابراین سرعت سیال کاهش می‌یابد. در صورتیکه تغییرات فشار زیاد باشد کاهش مومنتم هم شدید بوده و ممکن است به صفر برسد و منفی هم بشود که در این حالت لایه مرزی از مرز جدا شده، جریان سیال معکوس می‌شود که این ناحیه را ناحیه جدایش و نقطه شروع این ناحیه را نقطه جدایش می‌نامیم. ناحیه پایین دست خط جریان جدا شده از مرز را دنباله (Wake) می‌نامیم.

جدايش جريان در لايه مرزي در شكل زير نشان داده شده است.



در نقطه جدايش تغييرات سرعت در جهت عمود بر سطح صفحه صفر است: $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$

(توجه داشته باشيد که اگر $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ باشد سرعت لايه مرزي نزديک جداره صفر است.)

مثال) جدایش لایه مرزی هنگامی رخ می دهد که گرadiان فشار است.

۴) ثابت

۳) منفی

۲) مثبت

۱) صفر

حل) گزینه (۲) صحیح است.

لکاتی در مورد جدایش:

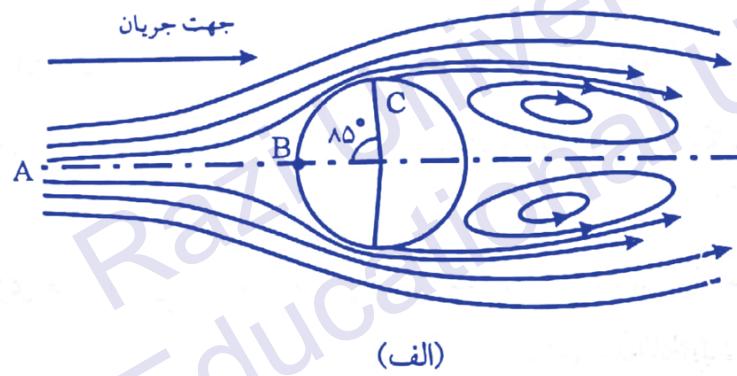
- ۱) وجود گرادیان فشار مثبت ($\frac{dP}{dx} > 0$) شرط لازم برای جدایش است ولی شرط کافی نیست.
- ۲) در اثر جدایش، دراگ افزایش می‌یابد و نیروی لیفت کاهش می‌یابد.
- ۳) جدایش در جریانهای آرام و درهم می‌تواند رخ دهد.
- ۴) جدایش تنها برای جریان لزج دارای معنی است.
- ۵) در نقطه جدایش تنش برشی روی دیواره صفر است ($\tau_w = 0$)
- ۶) لایه مرزی درهم به دلیل دارا بودن مومنتوم بیشتر نسبت به جریان آرام در مقابل شیب فشار معکوس مقاومتر است در تیجه جدایش جریان از سطح در شرایط هندسی و گرادیان فشار یکسان در جریان درهم دیرتر از جریان آرام اتفاق می‌افتد.
- ۷) تئوری لایه مرزی تنها تا نقطه جدایش قابل استفاده است و پس از آن نقطه معتبر نیست.
- ۸) بیشترین نرخ افزایش ضخامت لایه مرزی موقعی است که گرادیان فشار نامطلوب زیاد باشد ($\frac{\partial P}{\partial x} > 0$) که در نهایت به جدایش بیانجامد که در آنجا بینهایت است.

جريان خارجی روی کره‌ها و استوانه‌ها

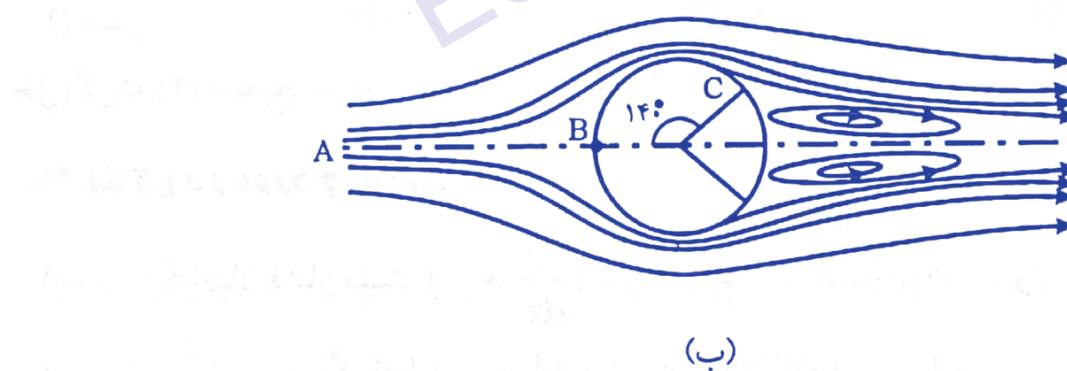
تغییرات نیروی دراگ

در این بخش جريان خارجي روی کره‌ها و استوانه‌ها را بررسی می‌کنیم. چنانچه قبل‌اً اشاره گردید نیروی دراگ وارد بر یک صفحه تنها دراگ اصطکاکی است ولی نیروی دراگ وارد بر استوانه و کره مجموع دراگ اصطکاکی و دراگ شکلی است.

در شکل زیر جريان روی یک کره در دو حالت جريان آرام و جريان درهم نشان داده شده است:



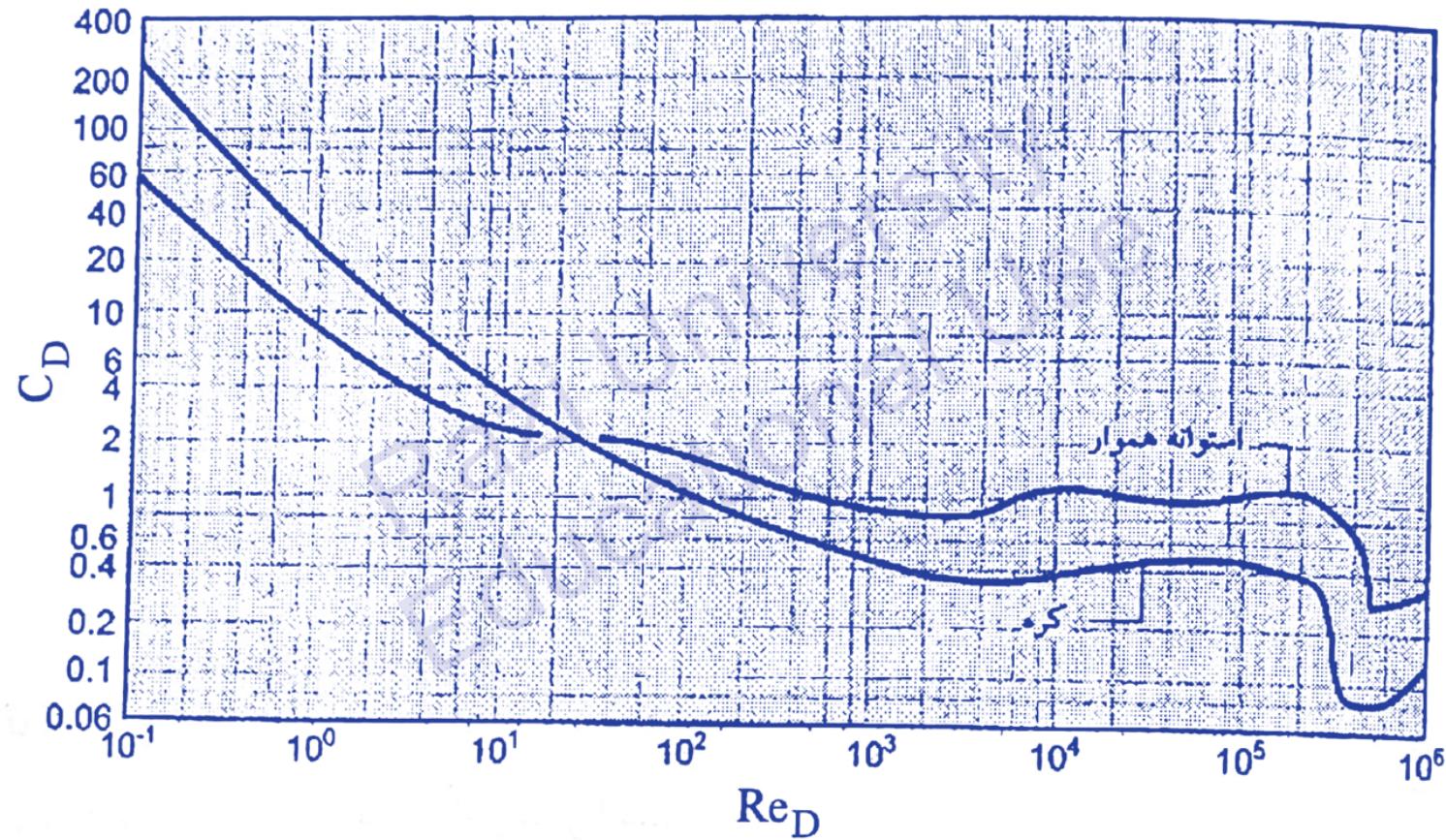
(الف)



(ب)

در جلوی جسم که نقطه سکون نام دارد سرعت سیال صفر است و رشد لایه‌های مرزی از این نقطه شروع می‌گردد و در بالای سطح کره ادامه می‌یابد تا موقعی از روی سطح جدا شود و با توجه به اینکه سیال مجبور به تغییر مسیر جهت گذرا جسم است علاوه بر درآگ اصطکاکی وارد بر آن در لایه مرزی نیروی درآگ شکلی هم به آن وارد می‌شود. جدایش لایه مرزی و تشکیل جریان کم فشار در پشت جسم در محلی صورت می‌گیرد که گردابه‌های بزرگ ظاهر می‌گردند که به ایجاد نیروی درآگ شکلی کمک می‌کند.

در شکل زیر تغییرات ضریب دراگ با عدد رینولدز برای جریان روی کره‌ها و استوانه‌ها نشان داده شده است:



با توجه به شکل چند ناحیه را می‌توان برای جریان روی کره درنظر گرفت:

۱) برای اعداد رینولدز کمتر از یک قانون استوکس برقرار است که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود.

۲) تا $Re = 1000$ ، ضریب دراگ به طور پیوسته با عدد رینولدز کاهش می‌یابد.

۳) از $Re = 1000$ تا 3×10^5 ، ضریب دراگ تقریباً ثابت است.

۴) برای $Re > 3 \times 10^5$ به علت گذار در لایه مرزی، ضریب دراگ شدیداً افت می‌کند. در این ناحیه جدایش به تأخیر افتاده و مقدار گردابه و نیروی دراگ کاهش می‌یابد.

تغییرات ضریب دراگ با عدد رینولدز برای استوانه شبیه کره است.

☞ **نکته:** برای جریان روی کره‌ها داریم:

$Re_D \leq 3 \times 10^5$ \Rightarrow جدایش در $\theta \approx 85^\circ$ می‌دهد \Rightarrow جریان آرام

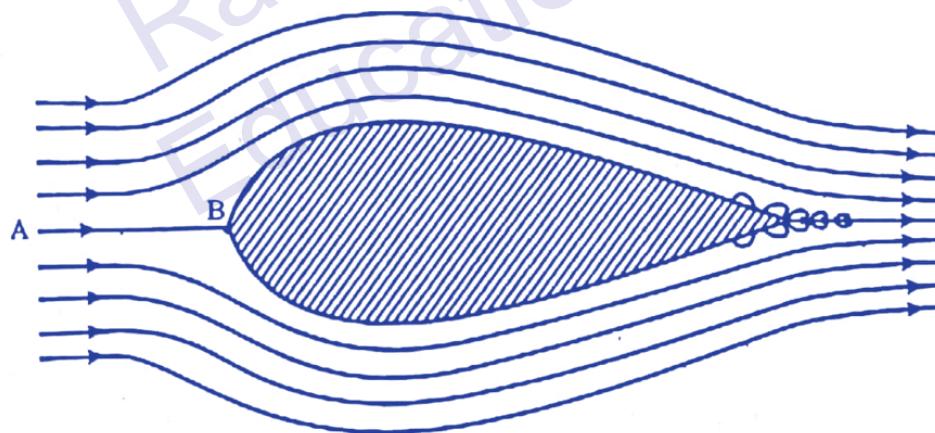
$Re_D \geq 3 \times 10^5$ \Rightarrow جدایش در $\theta \approx 140^\circ$ می‌دهد \Rightarrow جریان درهم

(توجه داشته باشید که در برخی از کتابها عدد رینولدز بحرانی برای جریان روی کره‌ها 2×10^5 و در برخی دیگر $2/5 \times 10^5$ ذکر شده است.)

خط جریان کردن جسم

با توجه به اینکه تشکیل گردابه سبب اتلاف انرژی مکانیکی می‌گردد اغلب لازم است جدایش لایه مرزی به وسیله خط جریانی کردن جسم به حداقل رسیده، یا از وقوع آن جلوگیری شود. در این روش تناسب ابعاد دنباله جسم را طوری در نظر می‌گیرند که افزایش فشار در لایه مرزی که علت اصلی جدایش است به اندازه کافی تدریجی گردد و جدایش به تأخیر بیفت. در این اجسام پشت جسم نوک تیز است.

در شکل زیر یک جسم خط جریانی نشان داده شده است.



☞ **نکته:** گذار از جریان آرام به درهم سبب به تأخیر افتادن جدایش می‌شود چون مومنتم سیال در لایه مرزی درهم نسبت به جریان آرام بیشتر است.

- در جریان سیال از روی کره‌ها داریم:
- ۱) اگر رینولدز کم باشد ($Re \leq 1$) دراگ اصطکاکی حاکم بر جریان است.
 - ۲) اگر عدد رینولدز تا حدود ۱۰۰۰ افزایش یابد دراگ کل ترکیبی از دراگ اصطکاکی و دراگ فشاری است.
 - ۳) با افزایش عدد رینولدز از سهم نسبی دراگ اصطکاکی کم می‌شود.

☞ **نکته:** با درهم شدن لایه مرزی ضریب دراگ روی استوانه کاهش می‌یابد.

☞ **نکته:** در جریان آرام بعد از نقطه جدايش، افزایش عدد رینولدز تأثیری بر روی محل نقطه جدايش ندارد در نتیجه نیروی دراگ ثابت می‌ماند.

☞ **نکته:** زبر کردن سطح کره، باعث می‌شود تبدیل جریان از حالت آرام به درهم در نقطه‌ای جلوتر رخ دهد و این امر سبب به تأخیر افتادن جدايش جریان می‌شود.

☞ **نکته:** با افزایش زبری سطح یک کره داریم :

الف) در اعداد رینولدز پایین اثری بر نیروی دراگ ندارد چون زبری برای جریان آرام بی‌تأثیر است.

ب) در اعداد رینولدز بالا نیروی دراگ کاهش می‌یابد.

مثال) دو کره هم قطر را به طور جداگانه در مقابل جریان یکنواخت هوا قرار می‌دهیم. کره اول دارای زبری سطح خیلی کم (*Smooth*) و کره دوم دارای زبری سطح زیاد (*Rough*) می‌باشد.

۱) نیروی درگ وارد بر کره اول بیشتر از نیروی درگ وارد بر کره دوم است.

۲) نیروی درگ وارد بر کره دوم بیشتر از نیروی درگ وارد بر کره اول است.

۳) در Re های کم نیروی درگ وارد بر کره اول برابر نیروی درگ وارد بر کره دوم است ولی در Re های بالا نیروی درگ وارد بر کره اول بیشتر از نیروی درگ وارد بر کره دوم است.

۴) در Re های نسبتاً کوچک، نیروی درگ وارد بر کره اول برابر نیروی درگ وارد بر کره دوم است ولی در Re های بالا، نیروی درگ وارد بر کره دوم بیشتر از نیروی درگ وارد بر کره اول است.

(حل)

در جریان آرام زیری تأثیری ندارد ولی در اعداد رینولدز بالا نیروی دراگ وارد بر کره اول بیشتر از نیروی دراگ وارد بر کره دوم است.

گزینه (۳) صحیح است.

قانون استوکس

در اعداد رینولدز کم ($Re \leq 1$) هیچگونه جدایی جریان وجود ندارد. هرگاه بتوان از نیروهای اینرسی صرفنظر کرد نیروی دراگ وارد بر کره‌ای به قطر D را می‌توان از رابطه زیر که قانون استوکس نامیده می‌شود به دست آورد:

$$F_D = 2\pi D \mu U$$

بنابراین ضریب دراگ برای جریان استوکس عبارت است از:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

☞ **نکته:** در جریان آرام استوکس بر روی یک کره، دراگ اصطکاکی دو برابر دراگ فشاری است:

$$F_D = 2\pi D \mu U + \pi D \mu U = 3\pi D \mu U$$

سرعت حد

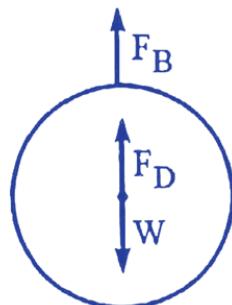
جسمی را در نظر می‌گیریم که در یک سیال ساکن سقوط می‌کند نیروهایی که به این جسم وارد می‌شوند عبارتند از نیروی دراگ (F_D)، نیروی شناوری (F_B) و نیروی ثقل (W). بعد از گذشت مدت زمانی از سقوط جسم این سه نیرو به تعادل می‌رساند و جسم به سرعت حد می‌رسد.

$$W = F_D + F_B$$

هرگاه جسمی با حجم V_s و وزن مخصوص γ_f در داخل سیالی با وزن مخصوص γ سقوط کند داریم:

$$\gamma_f V_s = C_D \frac{\rho U_t^2}{2} A + V_s \gamma_f$$

$$V_s = \frac{\pi D_s^3}{6}, \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$



$$U_t = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g D_s \rho_s - \rho_f}{C_D} \frac{\rho_f}{\rho_f}}$$

بنابراین سرعت حد جسم کروی عبارت است از:

اگر قانون استوکس برقرار باشد با جاگذاری $F_D = 3\pi D \mu U_t$ خواهیم داشت:

$$U_t = \frac{g D_s}{18 \mu} (\rho_s - \rho_f) \quad \text{یا} \quad U_t = \frac{2 g a_s}{9 \mu} (\rho_s - \rho_f)$$

:شعاع کره a_s

مثال) یک ذره کروی شکل در فضا با سرعت ثابت U_t به طرف پایین حرکت می‌نماید. (ویسکوزیته هوا $1.0 \times 10^{-5} N.s/m^2$ و دانسیته $1/950 kg/m^3$ باشد) اگر دانسیته ذره $1 kg/m^3$ و سرعت ذره $100 m/s$ فرض شود قطر ذره برابر است با
.....

- (۱) ۴/۵ سانتی متر (۲) ۳/۰ سانتی متر (۳) ۳/۵ سانتی متر (۴) ۴/۰ سانتی متر

(حل)

$$U_t = \frac{g D_s^2}{18\mu} (\rho_s - \rho_f) \Rightarrow 100 = \frac{9.81 \times D^2}{18 \times 1/950 \times 10^{-5}} (5 - 1/1)$$

$$\Rightarrow D = 0.03 m = 3 cm$$

گزینه (۲) صحیح است.

اگر عدد رینولدز کوچک نباشد و نتوانیم از قانون استوکس استفاده کنیم باید نیروی دراگ را از رابطه مربوطه اش جاگذاری کنیم و به طریق حدس و خطای زیر سرعت حد را به دست آوریم.

$$\underbrace{U_t \rightarrow Re \rightarrow C_D \rightarrow U_t}_{\text{حدس}}$$