مکانیک سیالات۲

اصول بقای جرم و تکانه

میثم سعیدی-استادیار گروه مهندسی مکانیک

Conservation of Mass or Continuity

✓ اصل بقای جرم یا پیوستگی

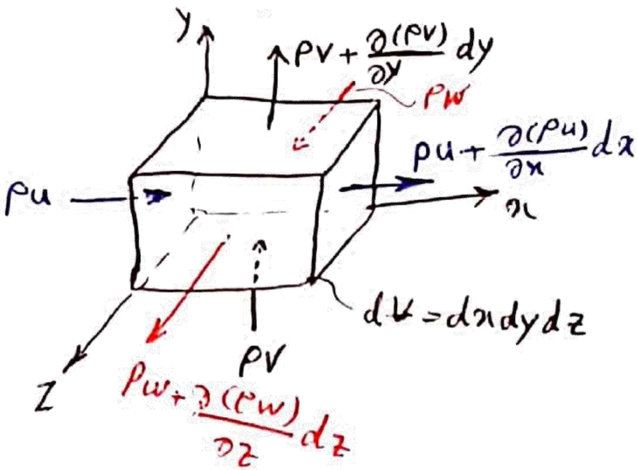
$$\underset{\text{سیستم}}{\delta m_s} = Cte \longrightarrow \frac{D(\delta m_s)}{Dt} = 0$$

$$\delta m_s = \rho\, \delta \forall_s$$

$$\Rightarrow \frac{D(\rho\, \delta \forall_s)}{Dt} = 0 \Rightarrow \rho \frac{D(\delta \forall_s)}{Dt} + \delta \forall_s \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\Rightarrow \rho \underbrace{\left(\frac{1}{\delta \forall_s} \frac{D(\delta \forall_s)}{Dt} \right)}_{= \nabla \cdot \vec{V}} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0} \leftarrow \text{روش سیستم}$$

بقای جرم از روش حجم کنترل



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.} \rho\, d\forall + \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, d\forall) + (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})_x + (\rho V \cdot dA)_{x+dx} + (\rho V \cdot dA)_y$$

$$+ (\rho V \cdot dA)_{y+dy} + (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})_z + (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})_{z+dz} = 0$$

$$\Rightarrow d\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho u\, dy\, dz + \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy\, dz - \rho v\, dx\, dz +$$

$$+ \left[\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right] dx\, dz - \rho w\, dx\, dy + \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\,]\, dy\, dx = 0$$

بقای جرم از روش حجم کنترل (ادامه)

روش حجم کنترل

$$\Rightarrow d\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} d\forall + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} d\forall + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} d\forall = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \vec{V}) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0 \xrightarrow{\text{برای جریان تراکم پذیر یا ناپذیر}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0 \;\; \text{یا} \;\; \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

برای جریان یک سیاله تراکم ناپذیر $\Leftarrow \rho = cte$

برای جریان تراکم ناپذیر اصل بقای جرم بصورت دیورژانس سرعت صفر می باشد $\nabla\cdot\vec{V} = 0$

تابع جریان Stream Function

- ✓ در جریان‌های دوبعدی برای ساده کردن معادلات از مفهوم تابع جریان استفاده می‌شود. تابع جریان کمیت عددی است که با میدان سرعت به نحوی تعریف می‌شود که معادله پیوستگی را ارضا کند.

$$\vec{V} = \nabla \times \psi \hat{k}$$

تابع جریان

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

$$d\psi = \overset{-v}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}\, dx + \overset{u}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}\, dy = -v\,dx + u\,dy$$

خطوط ψ ثابت همان خطوط جریان هستند.

$$\psi = cte, \; d\psi = 0 \Rightarrow -v\,dx + u\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

شیب خطوط ψ ثابت

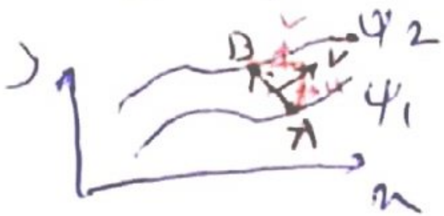
تابع جریان (ادامه)

✓ اختلاف دو مقدار از تابع جریان معادل دبی حجمی عبوری بین آن‌ها است.

$$\int_1^2 d\psi = \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy)$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy) = \int_1^2 \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \psi_2 - \psi_1 = Q_{1-2}$$



مثال

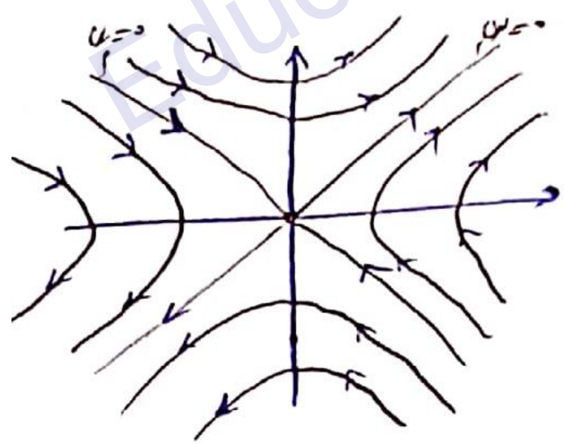
- ✓ تابع جریان را برای میدان جریان دوبعدی زیر بدست آورید.

$$\boxed{\vec{V} = 2y\,\hat{i} + 4x\,\hat{j}}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \Rightarrow \psi = y^2 + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x \Rightarrow \psi = -2x^2 + g(y)$$

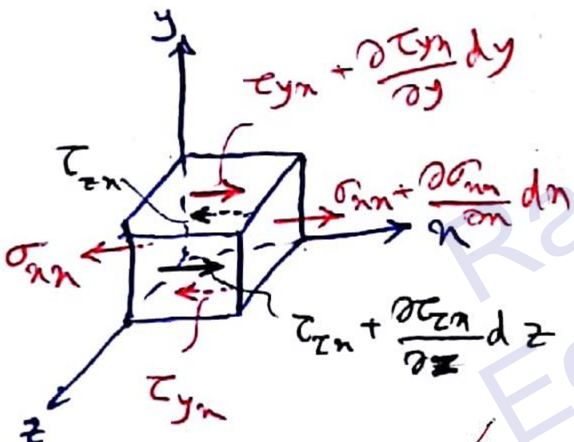
$$\Rightarrow \psi = y^2 - 2x^2$$



اصل بقای تکانه

$$\sum \delta \vec{F} = \delta m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

- ✓ انواع نیروها:
  - ✓ نیروهای حجمی (Body Forces) $\delta m \vec{g}$
  - ✓ نیروهای سطحی (Surface Forces)
    - ✓ نیروی سطحی ناشی از فشار $\delta \vec{F}_p = -\nabla P \delta \forall$
    - ✓ سایر نیروهای سطحی



$$\delta F_{sx} = -\cancel{\sigma_{xx}}\, dydz + (\cancel{\sigma_{xx}} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dydz - \cancel{\tau_{yx}\, dxdz} +$$

$$+ (\cancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dxdz - \cancel{\tau_{zx}\, dydx} + (\cancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dydx$$

$$\Rightarrow \delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta \forall$$

اصل بقای تکانه

$$\sum \delta\vec{F} = \delta m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

- ✓ انواع نیروها:
  - ✓ نیروهای حجمی (Body Forces) $\delta m\vec{g}$
  - ✓ نیروهای سطحی (Surface Forces)
    - ✓ نیروی سطحی ناشی از فشار $\delta\vec{F}_p = -\nabla P\,\delta\forall$
    - ✓ سایر نیروهای سطحی

بطور مشابه
در دو راستای دیگر

مولفه نیروی سطحی در جهت y

$$\delta F_{s_y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) d\forall$$

مولفه نیروی سطحی در جهت z

$$\delta F_{s_z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) d\forall$$

اصل بقای تکانه (ادامه)

$$\sum \delta \vec{F} = \delta m \frac{D\vec{V}}{Dt} \Rightarrow \overset{\rho\delta V}{\delta m}\, g - \nabla P \delta V + f_s \delta V = \overset{=\rho \delta V}{\delta m} \frac{D\vec{V}}{Dt} \Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + f_s + \rho \vec{g}$$

$$f_{sx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$f_{sy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

$$f_{sz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla\cdot\vec{V}\right]$$

Transpose: جابجا کردن سطر و ستون

به شکل یک رابطه برسیم :

$$f_s = \nabla\cdot(\mu \nabla \vec{V}) + \nabla\cdot(\mu \nabla \vec{V}^{T}) - \frac{2}{3}\nabla(\mu \nabla\cdot\vec{V})$$

اصل بقای تکانه (ادامه)

گرادیان

$$\nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

بنابراین معادله مومنتوم برای جریان‌های نیوتنی بصورت زیر می‌شود:

$$\sum \delta F_s = \rho\, \delta \forall \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$\rho\, \delta\forall\, g - \nabla P\, \delta\forall \left\{ \nabla \cdot \left(\mu \nabla \vec{V} + \mu \nabla \vec{V}^T - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{V}) \right) \right\} = \rho\, \delta\forall \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \left(\mu \nabla \vec{V} + \mu \nabla \vec{V}^T \right) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{V}) + \rho \vec{g}}$$

اصل بقای تکانه یا مومنتوم یا معادله ناویر استوکس

- ✓ با فرض جریان تراکم ناپذیر یک سیاله با خواص ثابت

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \rho = cte \,, \quad \mu = cte \,, \quad \nabla\cdot\vec{V} = 0$$

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu\nabla^2\vec{V} + \rho g}$$

$$\nabla\cdot(\mu\nabla\vec{V}) = \mu\,\nabla\cdot(\nabla\vec{V}) = \mu\,\nabla(\cancelto{0}{\nabla\cdot\vec{V}}) = 0$$

$$\nabla\cdot(\mu\nabla\vec{V}^T) = \mu\,\nabla\cdot(\nabla\vec{V}^T) = \mu\nabla^2\vec{V}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + V\cdot\nabla\vec{V}\right\} = -\nabla P + \mu\nabla^2\vec{V} + \rho\vec{g}$$

اصل بقای تکانه یا مومنتوم یا معادله ناویر استوکس

✓ در مختصات کارتزینی

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

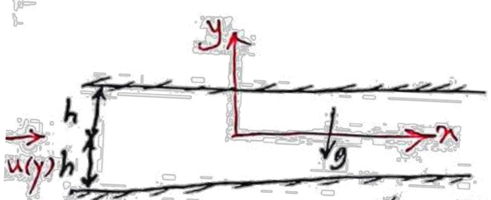
x جهت:
$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla u\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho g_x$$

y جهت:
$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho g_y$$

z جهت:
$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\nabla^2 w + \rho g_z$$

مثال

- جریان تراکم ناپذیر بین دو صفحه موازی که بصورت دائم، نیوتنی و یک بعدی در جهت X می‌باشد در نظر بگیرید. از حل معادلات دیفرانسیلی حاکم، پروفیل سرعت، تنش‌های برشی، دبی حجمی، سرعت ماکزیمم و سرعت متوسط را بدست آورید.



$v=0,\ w=0,\ u=u$

$\nabla\cdot\vec{V}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0$

مومنتم در راستای x: $\rho\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}+\cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}+\cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)+\cancel{\rho g_x}$

$$\Rightarrow \boxed{0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (\mathrm{I})$$

مثال (ادامه)

مشتق در جهت y : $\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial y}-\rho g=0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-\rho g \Rightarrow P=-\rho g y+F(x) \quad \text{(II)}$$

مشتق در جهت z : $\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$

$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z}=0 \Rightarrow P(x,y)$ فقط تابعی از x,y (III)

$$\xrightarrow{\text{II},\text{III}} \frac{\partial P}{\partial x}=F'(x) \qquad \xrightarrow{\text{I}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{تابع } x}=cte$$

u تنها تابع y است (u(y)) پس سمت چپ تابع y

چون دو طرف تساوی یکی تابع x یکی y است پس هر یک عدد ثابت باید باشند

مثال (ادامه)

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} y + C_1 \qquad u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$$

C_1 و C_2 از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

$$B.C.\begin{cases} u(+h) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} h^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{-1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} h^2 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{-1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(h^2 - y^2)$$

تنش برشی: $\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{\partial P}{\partial x} y \rightarrow$

ثابت و منفی

در تغییر y ، τ خطی و در دیواره‌ها ماکزیمم

مثال (ادامه)

سرعت ماکزیمم: $U_{max}(y=0) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2$

دبی جریان: $Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{Q}{L} = \int_{-h}^{+h} u\,dy = \int_{-h}^{+h}\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(h^2-y^2)\right]dy$

$\vec{V} = u\hat{i}$ ، $d\vec{A} = L\,dy\,\hat{i}$

عمق L : $\frac{Q}{L}$ دبی بر واحد عمق را داریم

$$= -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2 y + \frac{1}{6\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^3\Big]_{-h}^{+h} = -\frac{2}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q}{L} = -\frac{2}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3}$$

سرعت متوسط: $\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2hL} = \frac{-\frac{2}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3}{2h} = -\frac{1}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2$

در ارتباط سرعت ماکزیمم و متوسط: $\bar{u} = \frac{2}{3}u_{max}$ یا $u_{max} = 1.5\bar{u}$