



مبانی کامپیوتر و برنامه‌سازی

Number Bases

میثم سعیدی-استادیار گروه مهندسی مکانیک

مبنای اعداد

هر عدد N در مبنای B ، به صورت $(N)_B$ نمایش داده می‌شود. اگر مبنای عددی مشخص نگردد، ۱۰ منظور می‌شود.

▪ مثال ۱

بسط عدد 123.45

$$123.45 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

سیستم اعداد دهدهی یکی از سیستم‌های متداول است که همگان روزانه با آن سروکار دارند. در این سیستم هر عدد می‌تواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۹ باشد. هر عدد در سیستم دهدهی را بنابر آنچه که قبلاً گفته شد می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k (10)^k$$

سیستم اعداد دودویی

در این سیستم، مبنای اعداد، ۲ است ($B = 2$)، لذا هر عدد در این سیستم می تواند ترکیبی از ارقام ۰ و ۱ باشد، مانند ۱۱۱، ۱۰۱۱، و ۱۰۰۰۱۱۱۱. شکل کلی اعداد این سیستم به صورت

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k (2)^k$$

است. جدول ۱-۱ معادل دودویی ارقام دهدهی را نمایش می دهد:

جدول ۱-۱ معادل دودویی ارقام دهدهی.

دهدهی	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
دودویی	1001	1000	111	110	101	100	11	10	1	0

سیستم اعداد هشتایی

در این سیستم، مبنای اعداد، ۸ است ($B = 8$)، لذا هر عدد در این سیستم می‌تواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۷ باشد. نمایش عدد در این سیستم به صورت

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k (8)^k$$

است. جدول ۱-۲ معادل هشتایی ارقام دهدهی را نشان می‌دهد.

جدول ۱-۲ معادل هشتایی ارقام دهدهی.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	دهدهی
11	10	7	6	5	4	3	2	1	0	هشتایی
001001	001000	111	110	101	100	011	010	001	000	دودویی

سیستم اعداد شانزده تایی

در این سیستم، مبنای اعداد، ۱۶ است، ($B = 16$)، لذا می توان از ۱۶ رقم در نوشتن اعداد این سیستم استفاده کرد. چون اعداد ۹ به بالا را به عنوان یک رقم نمی شناسیم، برای نمایش ۱۰ تا ۱۵ از علائم A تا F استفاده می کنیم. لذا ارقام مبنای ۱۶ عبارتند از: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، A، B، C، D، E، و F. اعدادی مثل $B1A$ ، $1CD$ و ACB اعدادی در مبنای ۱۶ هستند. شکل کلی نمایش این اعداد به صورت

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k (16)^k$$

است. جدول ۱-۳ معادل مبنای ۱۶ ارقام دهدهی را نمایش می دهد.

جدول ۱-۳ معادل مبنای ۱۶ ارقام دهدهی.

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	دهدهی
F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	مبنای ۱۶

تبدیل اعداد دهدهی و دودویی به هم

برای تبدیل اعداد صحیح دهدهی به دودویی از روش تقسیم متوالی استفاده می‌شود. در این روش، عدد دهدهی بر ۲ تقسیم می‌شود و باقیمانده و خارج‌قسمت محاسبه می‌گردند. اگر خارج‌قسمت صفر نباشد، خارج‌قسمت بر ۲ تقسیم خواهد شد و این روند تا صفر شدن خارج‌قسمت ادامه می‌یابد. باقیمانده‌های ایجاد شده از هر تقسیم، نگهداری می‌شوند و از آخرین باقیمانده به اولین باقیمانده در کنار هم نوشته می‌شوند. عدد حاصل، در مبنای ۲ خواهد بود. بدیهی است که تقسیم به صورت صحیح انجام می‌شود (خارج‌قسمت اعشاری نیست).

تبدیل اعداد دهدهی و دودویی به هم

مثال

تبدیل عدد $(11001)_2$ به مبنای ده.

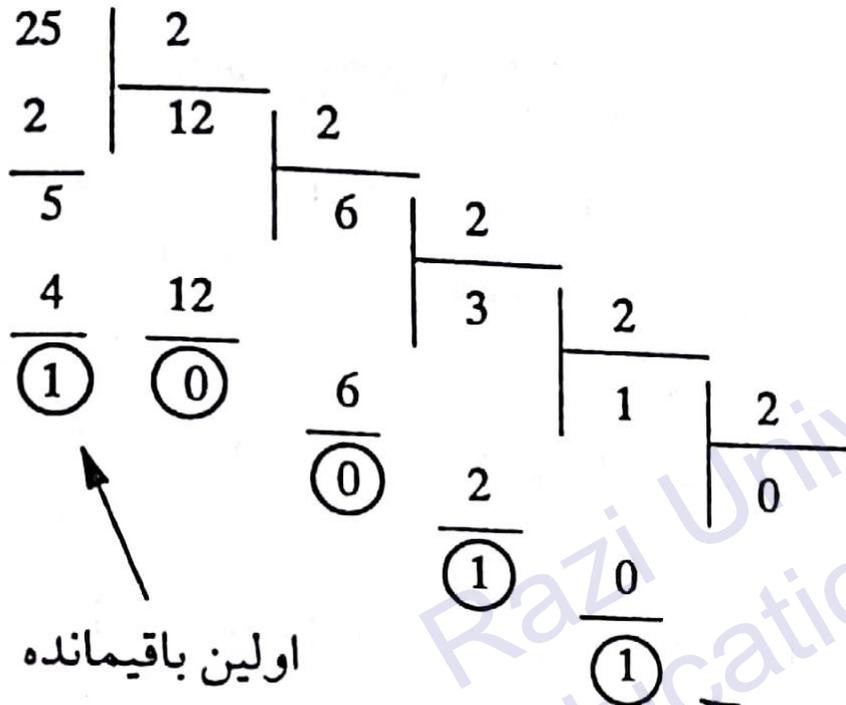
$$\begin{aligned}11001 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 16 + 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$(11001)_2 = (25)_{10}$$

تبدیل اعداد دهدهی و دودویی به هم

مثال

تبدیل عدد ۲۵ به مبنای ۲.



$$(25)_{10} = (11001)_2$$

برای تبدیل اعداد مبنای ۲ به مبنای ۱۰ باید عدد را بسط داد. به عنوان مثال، بسط عدد ۴۵۷۶ به صورت زیر است:

$$4576 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

تبدیل اعداد اعشاری ددهی و دودویی به هم

برای تبدیل اعداد اعشاری مبنای ۱۰، به ۲، باید قسمت صحیح و اعشاری را جداگانه به مبنای ۲ تبدیل کرد. برای تبدیل قسمت صحیح، از روش تقسیم متوالی بر ۲ و برای تبدیل قسمت اعشاری، از روش ضرب متوالی در ۲ استفاده می‌گردد. در روش ضرب متوالی در ۲، قسمت اعشار در ۲ ضرب شده، قسمت صحیح حاصل، نگهداری می‌شود و این روند برای قسمت اعشاری حاصل ادامه می‌یابد تا قسمت اعشار به صفر برسد. سپس قسمت‌های صحیح حاصل را در کنار هم می‌نویسیم. عدد حاصل، تبدیل مبنای ۲ قسمت اعشاری است. با تلفیق قسمت اعشاری و قسمت صحیح، عدد به طور کامل به مبنای دو تبدیل می‌شود.

تبدیل اعداد اعشاری ددهی و دودویی به هم

مثال

تبدیل $(1110.01)_2$ به مبنای ده.

$$1110 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 8 + 4 + 2 + 0 = 14$$

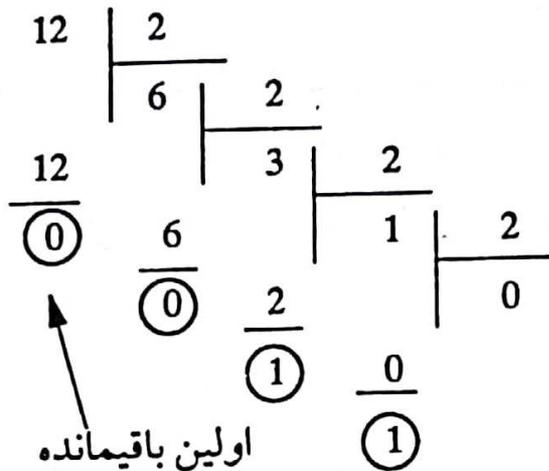
$$(0.01) = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$
$$= 0 + \frac{1}{4}$$
$$= 0.25$$

با تلفیق قسمت اعشاری و صحیح، عدد مبنای ده حاصل می شود.

$$1110.01 = 14.25$$

مثال

تبدیل عدد 12.25 به مبنای دو.



اولین باقیمانده

آخرین باقیمانده

$$(12)_{10} = (1100)_2$$

تبدیل قسمت اعشاری به صفر

اولین قسمت صحیح حاصل

دومین قسمت صحیح حاصل

لذا خواهیم داشت:

$$0.25 \times 2 = 0.5$$

$$0.5 \times 2 = 1$$

$$(0.25)_{10} = (0.01)_2$$

با تلفیق قسمت‌های صحیح و اعشاری، مبنای دو عدد 12.25 حاصل می‌شود:

$$(12.25)_{10} = (1100/01)_2$$

اگر با ضرب‌های متوالی، قسمت اعشار به صفر نرسد، باید عمل ضرب را تا پر شدن کلمه حافظه ادامه داد. برای تبدیل اعداد اعشاری مبنای ۲ به مبنای ۱۰ از بسط عدد استفاده می‌کنیم.

عملیات ریاضی در مبنای ۲

عمل جمع در مبنای ۲ مانند عمل جمع در مبنای ۱۰ است. همانطور که در سیستم دهدهی، ده بر یک داریم، در سیستم دودویی، دو بر یک خواهیم داشت. توجه به موارد زیر ضروری است:

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 1 = 10$$

در حالت آخر، ۱ با ۱ جمع شده، به جای آن صفر قرار گرفت و ۱ به رقم بعدی منتقل شد. این عمل را دو بر یک گویند. اگر بر اثر ۲ بر یک، عدد یک به رقم بعدی منتقل شود و حاصل دو رقم قبلی نیز یک باشد، عدد ۱ را نوشته و عدد ۱ دیگر را به عنوان دو بر یک به رقم بعدی منتقل می‌کنیم.

عملیات ریاضی در مبنای ۲

مثال

انجام چند عمل جمع در مبنای ۲.

$$\begin{array}{r} 100111+ \\ 111010 \\ \hline 1100001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111011+ \\ 1010000 \\ \hline 11001011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111+ \\ 11110 \\ \hline 111101 \end{array}$$

عملیات ریاضی در مبنای ۲

انجام عمل تفریق در مبنای ۲ نیز تقریباً مشابه تفریق در مبنای ۱۰ است و توجه به نکات زیر ضروری است.

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

برای تفریق ۱ از صفر (۰ - ۱) باید یک را از مبنای عدد، یعنی ۲ (۱۰ در مبنای ۲) کم کرد و در مرحله بعد به حساب آورد.

عملیات ریاضی در مبنای ۲

مثال

انجام چند عمل تفریق در مبنای ۲.

$$\begin{array}{r} 11111- \\ 1000 \\ \hline 10111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111- \\ 10101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10010- \\ 1001 \\ \hline 1001 \end{array}$$

عملیات ریاضی در مبنای ۲

مثال

$$\begin{array}{r}
 101 \times \\
 11 \\
 \hline
 101 \\
 101 \\
 \hline
 1111
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 111101 \times \\
 101 \\
 \hline
 111101 \\
 000000 \\
 1111101 \\
 \hline
 100110001
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1100 \times \\
 10 \\
 \hline
 0000 \\
 1100 \\
 \hline
 11000
 \end{array}$$

جمع و تفریق در مبنای ۱۶

جمع و تفریق در این مبنایز مانند ۲ و ۱۰ است؛ با این تفاوت که در این مبنای، به جای ۱۰ بریک و ۲ بریک، ۱۶ بریک خواهیم داشت، این کار وقتی انجام می شود که حاصل جمع دو رقم مساوی یا بیشتر از ۱۶ باشد.

■ مثال

چند عمل جمع و تفریق در مبنای ۱۶.

$$\begin{array}{r} 1A53 + \\ 371 \\ \hline 1DC4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ABE12 + \\ 354 \\ \hline AC166 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BFCA2 - \\ 14A2 \\ \hline BE800 \end{array}$$

ذخیره اعداد صحیح در کامپیوتر

اعداد صحیح مثبت به صورت مبنای دو در حافظه نگهداری می شوند. طول کلمات کامپیوتر ممکن است از کامپیوتری به کامپیوتر دیگر متفاوت باشد ولی معمولاً توانی از دو است. مثل ۱۶ بیت، ۳۲ بیت و ۶۴ بیت. طول یک کلمه ماشین برای نمایش عدد صحیح به دو قسمت تقسیم می شود: ۱. بیت علامت ۲. مقدار عدد

برای نمایش عدد مثبت صحیح، باید آن را به مبنای دو تبدیل کرده، کلمه ماشین را از سمت راست به چپ پر کرد و بیت علامت را برابر با صفر قرار داد. بیت های باقیمانده نیز با صفر پر می شوند.

